Eine kürzere Methode die Vergleiche der in der Form $\int \frac{P\partial z}{\sqrt{A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4}}$ enthaltenen transzendenten Grössen zu finden *

Leonhard Euler

In Kapitel VI Sect. II meiner *Institutionum Calculi Integralis* Tom. I habe ich außerordentliche Vergleiche zwischen höchst transzendenten Größen angegeben, zu welchen ich mit einer vollkommen indirekten Methode geführt worden war. Nachdem also vor nicht allzu der illustre LAGRANGE eine höchst brillante Methode erdacht hatte dieselben Vergleiche zu finden, wird dieser Gegenstand um vieles kürzer und eleganter dargestellt werden können, als es mir zu dieser Zeit freilich möglich war, weshalb die folgenden Supplemente den Geometern nicht missfallen werden.

HYPOTHESE 1

§ **80** Es bezeichne das Zeichen $\Pi : z$ hier durchgehend den Wert der Integralformel

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma zz+\delta z^3+\varepsilon z^4}}$$

*Original Titel: "Methodus succinctior comparationes quantitatum transcendentium in forma $\int \frac{P\partial z}{\sqrt{A+2Bz+Czz+2Dz^3+Ez^4}}$ contentarum inveniendi ", zuerst publiziert in: *Institutionum calculi integralis, Band 4* (1794, verfasst 1777): pp. 504–524, Nachdruck in: Opera Omnia: Series 1, Volume 21, pp. 207 – 226, Eneström-Nummer E676, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

so genommen, dass sie für $z = 0$ gesetzt verschwindet. Der Kürze wegen setze man aber

$$\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \varepsilon z^4 = Z,$$

sodass

$$\Pi : z = \int \frac{\partial z}{\sqrt{Z}}$$

ist. Dann sei aber über der Achse oz (Fig. 1)[1] eine Kurve OZ solcher Art konstruiert,

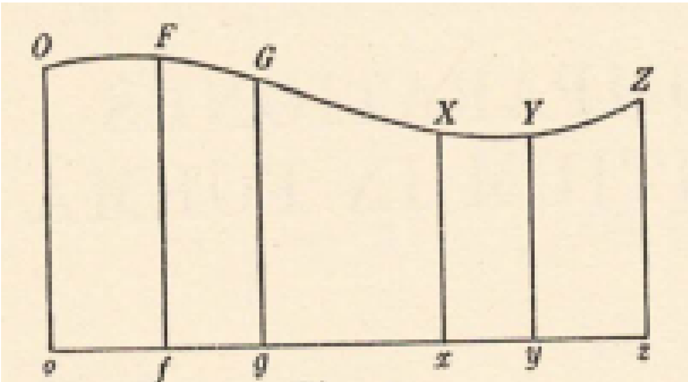

Fig. 1.

deren einzelne den Abszissen $oz = z$ entsprechende Bogen OZ mit der Formel $\Pi : z = \int \frac{\partial z}{\sqrt{Z}}$ ausgedrückt werden; und diese Kurve wird sich dieser außerordentlichen Eigenschaft erfreuen, dass, nachdem auf ihr nach Belieben irgendein Bogen FG genommen wurde, von einem anderen Punkt X aus immer ein jenem Bogen FG gleicher Bogen XY geometrisch abgetrennt werden kann, den Beweis welcher Behauptung die Lösung des folgenden Problems an die Hand geben wird.

PROBLEM 1

§81 *Wenn auf der geraden beschriebenen Kurve irgendein Bogen FG vorgelegt wird, unzählige andere Bogen XY auf der Kurve geometrisch anzugeben, welche einzelnen Bogen dem Bogen FG gleich sind.*

[1] Der Scan zeigt die entsprechende Figur der Opera Omnia Version.

LÖSUNG

Nachdem von den Punkten F und G aus zur Achse oz die Ordinaten Ff und Gg gezogen worden sind, nenne man die Abszissen $of = f$ und $og = g$ und die Bogen werden $OF = \Pi : f$ und $OG = \Pi : g$ sein, woher die Länge des vorgelegten Bogens $FG = \Pi : g - \Pi : f$ sein wird. In gleicher Weise nenne man für den gesuchten Bogen XY die Abszissen $ox = x$ und $oy = y$ und die Bogen werden $OX = \Pi : x$ und $OY = \Pi : y$ sein und daher wird der Bogen $XY = \Pi : y - \Pi : x$ sein; weil dieser dem Bogen FG gleich sein muss, wird man diese Gleichung haben

$$\Pi : y - \Pi : x = \Pi : g - \Pi : f,$$

welcher Genüge leistet werden muss.

§82 Weil ja die Punkte F und G als fest betrachtet werden, während die Punkte X und Y über die ganze Kurve variieren können, wird die Differentiation diese Gleichung liefern $\partial\Pi : y - \partial\Pi : x = 0$. Daher, weil per Annahme

$$\Pi : x = \int \frac{\partial x}{\sqrt{X}} \quad \text{und} \quad \Pi : y = \int \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$$

ist, mit

$$X = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \quad \text{und} \quad Y = \alpha + \beta y + \gamma yy + \delta y^3 + \varepsilon y^4,$$

ist die Lösung des Problems auf diese Differentialgleichung reduziert worden

$$\frac{\partial y}{\sqrt{Y}} - \frac{\partial x}{\sqrt{X}} = 0.$$

§83 Hier nun die Methode des ill. LAGRANGE zur Hilfe nehmend wollen wir

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \partial t$$

setzen und es wird $\frac{\partial y}{\sqrt{Y}} = \partial t$ sein. Hier haben wir natürlich das neue Element ∂t in die Rechnung eingeführt, welches in den folgenden Differentiationen als konstant behandelt werde; dann werden wir also

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{X} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{Y}$$

haben. Wenn wir daher also weiter

$$y + x = p \quad \text{und} \quad y - x = q$$

setzen, werden wir daher

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sqrt{Y} + \sqrt{X} \quad \text{und} \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \sqrt{Y} - \sqrt{X}$$

haben, das Produkt welcher Formeln

$$\frac{\partial p \partial q}{\partial t^2} = Y - X$$

liefert. Nachdem also die Werte anstelle von Y und X eingesetzt worden sind, wird

$$\frac{\partial p \partial q}{\partial t^2} = \beta(y - x) + \gamma(y^2 - x^2) + \delta(y^3 - x^3) + \varepsilon(y^4 - x^4)$$

sein. Daher, weil

$$y = \frac{p + q}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{p - q}{2}$$

ist, wird

$$y - x = q, \quad y^2 - x^2 = pq, \quad y^3 - x^3 = \frac{1}{4}q(3pp + qq)$$

und

$$y^4 - x^4 = \frac{1}{2}pq(pp + qq)$$

sein, nach Einsetzen welcher Werte und Division durch q man

$$\frac{\partial p \partial q}{q \partial t^2} = \beta + \gamma p + \frac{1}{4}\delta(3pp + qq) + \frac{1}{2}\varepsilon p(pp + qq)$$

haben wird, der Nutzen welcher Gleichung in der folgenden Rechnung sehr groß sein wird.

§84 Nun werden nach Nehmen der Quadrate die ersten Gleichungen

$$\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = X \quad \text{und} \quad \frac{\partial y^2}{\partial t^2} = Y$$

geben, welche man erneut differenziere, zu welchem Ziel wir der Kürze wegen

$$\partial X = X' \partial x \quad \text{und} \quad \partial Y = Y' \partial Y$$

setzen wollen, und daher werden wir

$$\frac{2\partial\partial x}{\partial t^2} = X' \quad \text{und} \quad \frac{2\partial\partial y}{\partial t^2} = Y'$$

erhalten, nach Addieren welcher

$$\frac{2\partial\partial p}{\partial t^2} = X' + Y'$$

sein wird. Weil also

$$X' = \beta + 2\gamma x + 3\delta xx + 4\varepsilon x^3 \quad \text{und} \quad Y' = \beta + 2\gamma y + 3\delta yy + 4\varepsilon y^3$$

ist, wird

$$\frac{2\partial\partial p}{\partial t^2} = 2\beta + 2\gamma(x+y) + 3\delta(x^2+y^2) + 4\varepsilon(x^3+y^3)$$

sein. Durch Einführen der Buchstaben p und q wird wie zuvor

$$x + y = p, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(pp+qq), \quad x^3 + y^3 = \frac{1}{4}p(pp+3qq)$$

werden und so wird diese Gleichung diese Form annehmen

$$\frac{2\partial\partial p}{\partial t^2} = 2\beta + 2\gamma p + \frac{3}{2}\delta(pp+qq) + \varepsilon p(pp+3qq).$$

§85 Von dieser letzten Gleichung ziehe man die vorhergehende zweimal genommen ab und es wird

$$\frac{2\partial\partial p}{\partial t^2} - \frac{2\partial p \partial q}{q\partial t^2} = \delta qq + 2\varepsilon pqq.$$

Daher werden wir durch Teilen durch qq

$$\frac{1}{\partial t^2}\left(\frac{2\partial\partial p}{qq}-\frac{2\partial p\partial q}{q^3}\right)=\delta+2\varepsilon p$$

haben, jede der beiden Seiten welcher Gleichung offenkundig eine Integration zulässt, wenn mit dem Element ∂p multipliziert wird. Denn danach wird die Integralgleichung

$$\frac{\partial p^2}{qq\partial t^2}=C+\delta p+\varepsilon pp$$

sein.

§86 Anfangs haben wir aber gesehen, dass $\frac{\partial p}{\partial t}=\sqrt{X}+\sqrt{Y}$ ist und daher gelangen wir sofort zu dieser algebraischen Integralgleichung

$$\frac{(\sqrt{X}+\sqrt{Y})^2}{qq}=C+\delta p+\varepsilon pp.$$

Daher, weil $p=x+y$ und $q=y-x$ ist, wird diese Gleichung entwickelt

$$\frac{X+Y+2\sqrt{XY}}{(y-x)^2}=C+\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2$$

werden, wo die durch Integration eingehende Konstante gemäß der Natur des Problems so bestimmt werden muss, dass, wenn der Punkt X auf den Punkt F fällt, der Punkt Y auf den Punkt G fällt, oder dass für $x=f$ gesetzt $y=g$ ist.

§87 Weil nun

$$X+Y=2\alpha+\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+\delta(x^3+y^3)+\varepsilon(x^4+y^4)$$

ist, werden wir, wenn wir die Terme $\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2$ auf die andere Seite bringen, zu dieser Gleichung gelangen

$$\frac{2\alpha+\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+\delta xy(x+y)+2\varepsilon xxyy+2\sqrt{XY}}{(y-x)^2}=C.$$

Wir wollen aber darüber hinaus auf beiden Seiten γ subtrahieren und anstelle von $C-\gamma$ schlicht Δ schreiben und auf diese Weise wird unsere Gleichung auf diese hinreichend gefällige Form reduziert werden

$$\frac{2\alpha+\beta(x+y)+2\gamma xy+\delta xy(x+y)+2\varepsilon xxyy+2\sqrt{XY}}{(y-x)^2}=\Delta.$$

§88 Weil nun Δ so bestimmt werden muss, dass für $x=f$ genommen $y=g$ wird, wenn wir gemäß der Analogie

$$\alpha+\beta f+\gamma ff+\delta f^3+\varepsilon f^4=F \quad \text{und} \quad \alpha+\beta g+\gamma gg+\delta g^3+\varepsilon g^4=G$$

setzen, wird diese Konstante Δ so ausgedrückt sein

$$\Delta=\frac{2\alpha+\beta(f+g)+2\gamma fg+\delta fg(f+g)+2\varepsilon ffgg+2\sqrt{FG}}{(g-f)^2}.$$

Nachdem also diese Gleichung gefunden worden ist, wird, wenn x nach Belieben irgendein Wert zugeteilt wird, daher ein Wert von y gefunden werden können, sodass die eine Grenze X des gesuchten Bogens XY nach Belieben angegeben werden kann. Aber es ist leicht klar, dass diese Bestimmung zu mehr als lästigen Rechnungen führt, weil ja die gefundene Gleichung durch Quadrieren von der Irrationalität $\sqrt{XY}$ befreit werden müsste. Aber auf die folgende Weise wird diese Untersuchung erleichtert werden können.

§89 Weil ja diese Formel

$$2\alpha+\beta(x+y)+2\gamma xy+\delta xy(x+y)+2\varepsilon xxyy$$

essentiell in die Rechnung eingeht, wollen wir der Kürze wegen an ihrer Stelle das Zeichen $[x,y]$ schreiben, dessen Wert also bekannt sein wird, auch wenn anstelle von x und y andere Buchstaben angenommen werden. Auf diese Weise wird die gefundene Gleichung so dargestellt werden können

$$\frac{[x,y]+2\sqrt{XY}}{(y-x)^2}=\frac{[f,g]+2\sqrt{FG}}{(g-f)^2},$$

welche Gleichung also die Relation zwischen den beiden Ordinaten x und y ausdrückt, dass dem Problem Genüge geleistet wird, das heißt, dass

$$\Pi:y-\Pi:x=\Pi:g-\Pi:f$$

wird. Deshalb, weil daher auch

$$\Pi : y - \Pi : g = \Pi : x - \Pi : f$$

folgt, wird daraus diese Gleichung hervortreten

$$\frac{[g,y] + 2\sqrt{GY}}{(y-g)^2} = \frac{[f,x] + 2\sqrt{FX}}{(x-f)^2}.$$

§90 Aus dieser Gleichung wird zusammen mit der ersten nun leicht der Wurzelausdruck $\sqrt{Y}$ eliminiert werden können und so wird man die nur den Buchstaben y als Unbekannte involvierende Gleichung haben, woher sein Wert ohne Schwierigkeit bestimmt werden kann. Aber dem, der die Rechnung durchführt, wird klar werden, dass nur zu einer quadratischen Gleichung gelangt wird, sodass zwei Werte für den Punkt Y gefunden werden, so wie es dir Natur der Sache erfordert, weil ja nach Nehmen des Punktes X der andere Punkt Y so rechts wie links von ersterem liegen kann. Daher verweilen wir aber nicht weiter bei dieser Rechnung, weil es hier ja hauptsächlich vorgelegt ist, die ganze Lösung dieses Problems mit einer direkten Methode a priori herzuleiten.

HYOPTHESE 2

§91 Nachdem über der Achse oz (Fig. 2)[2] die Kurve OZ konstruiert worden ist,

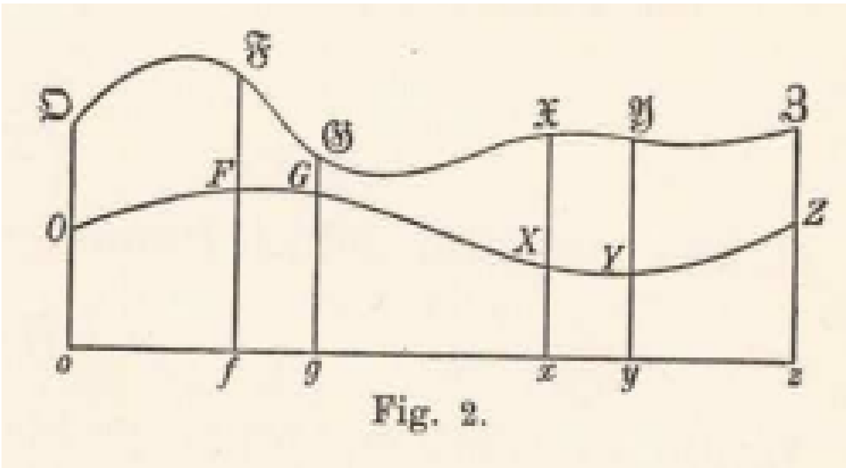

Fig. 2.

[2]Der Scan zeigt die entsprechende Figur der Opera Onmia Version.

nehme man über derselben Achse eine andere darüber beschrieben Kurve $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ solcher Art, dass der Abszisse $oz = z$ der Bogen $\mathfrak{O}\mathfrak{Z} = \Phi : z$ entspricht, sodass

$$\Phi : z \int \frac{\partial z(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}zz + \mathfrak{D}z^3 + \text{etc.})}{\sqrt{Z}}$$

ist, nachdem dieses Integral in gleicher Weise so genommen worden ist, dass es für $z = 0$ gesetzt verschwindet, während wie zuvor

$$Z = \alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \varepsilon z^4$$

ist. Für den Zähler wollen wir aber der Kürze wegen

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}zz + \mathfrak{D}z^3 + \text{etc.} = \mathfrak{Z}$$

setzen, sodass

$$\Pi : z = \int \frac{\mathfrak{Z}\partial z}{\sqrt{Z}}$$

ist.

§92 Nachdem diese Kurve auf diese Weise beschrieben worden ist, wird sie mit dieser außerordentlichen Eigenschaft versehen sein, dass, wenn in der ersten Kurve die einander gleichen Bogen FG und XY abgetrennt worden waren, nach Verlängern der Ordinaten auf der neuen Kurve die Differenz der auf diese Weise abgetrennten Bogen $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ entweder algebraisch oder zumindest mit Logarithmen oder Kreisbogen angegeben werden kann, die Gültigkeit welcher Sache die Lösung des folgenden Problems zeigen wird.

Problem 2

§93 *Wenn in der ersten gemäß der ersten Hypothese beschriebenen Kurve die zwei gleichen Bogen FG und XY abgetrennt worden sind und ihnen auf der gerade beschriebenen Kurve die Bogen $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ entsprechen, denen natürlich dieselben Abszissen auf der Achse zukommen, die Differenz zwischen diesen zwei Bogen ausfindig zu machen.*

Weil also hier die Differenz zwischen den Bogen $\mathfrak{FG}$ und $\mathfrak{XY}$ gesucht wird, setze man sie $= V$, welche daher als gewisse Funktion von x und y angesehen können wird, wenn wir freilich die Punkte $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ als konstant ansehen. Weil also

$$\text{Bogen}\,\mathfrak{FG} = \Phi : g - \Phi : f \quad \text{und} \quad \text{Bogen}\,\mathfrak{XY} = \Phi : y - \Phi : x$$

ist, werden wir

$$\Phi : y - \Phi : x = \Phi : g - \Phi : f + V$$

haben, woher wir durch Differenzieren

$$\frac{\mathfrak{Y}\partial y}{\sqrt{Y}} - \frac{\mathfrak{X}\partial x}{\sqrt{X}} = \partial V$$

haben werden, weil wir den Buchstaben f und g für konstant halten.

§94 Wir wollen nun, wie es oben gemacht worden ist,

$$\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}} = \partial t$$

setzen und diese Gleichung wird diese Form annehmen

$$(\mathfrak{Y} - \mathfrak{X})\partial t = \partial V.$$

Aber bei der Lösung des ersten Problem sind wir zu dieser finalen Gleichung geführt worden

$$\frac{\partial p^2}{qq\partial t^2} = C + \delta p + \varepsilon pp,$$

woher

$$\frac{\partial p}{q\partial t} = \sqrt{C + \delta p + \varepsilon pp} = \sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}$$

wird, und daher berechnen wir

$$\partial t = \frac{\partial p}{q\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}},$$

wo $p = x + y$ und $q = y - x$ ist. Nachdem also dieser Wert eingeführt worden ist, ist die aufzulösende Gleichung

$$\partial V = \frac{(\mathfrak{Y} - \mathfrak{X})\partial p}{q\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}},$$

mit

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}xx + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.}$$

und in gleicher Weise

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}yy + \mathfrak{D}y^3 + \text{etc.},$$

fortzusetzen soweit wie es beliebt.

§95 Wenn wir daher diese Werte einsetzen, werden wir

$$\mathfrak{Y} - \mathfrak{X} = \mathfrak{B}(y - x) + \mathfrak{C}(y^2 - x^2) + \mathfrak{D}(y^3 - x^3) + \mathfrak{E}(y^4 - x^4) + \text{etc.}$$

haben werden, woher, wenn wir anstelle von x und y die Größen p und q haben werden, wegen $x = \frac{p-q}{2}$ und $y = \frac{p+q}{2}$ die folgenden Werte entspringen werden

$$y - x = q, \quad y^2 - x^2 = pq, \quad y^3 - x^3 = \frac{1}{4}q(3pp + qq),$$
$$y^4 - x^4 = \frac{1}{2}pq(pp + qq), \quad y^5 - x^5 = \frac{1}{16}q(5p^4 + 10ppqq + q^4) \quad \text{etc.}$$

§96 Also wird die Größe Q durch die folgenden Integralformeln gemäß der Buchstaben $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. bestimmt werden

$$V = \mathfrak{B}\int \frac{\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}} + \mathfrak{C}\int \frac{p\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}}$$
$$+\frac{1}{4}\mathfrak{D}\int \frac{(3pp + qq)\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \partial p + \varepsilon pp}} + \frac{1}{2}\mathfrak{E}\int \frac{p(pp + qq)\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}}$$
$$+\frac{1}{16}\mathfrak{F}\int \frac{(5p^4 + 10ppqq + q^4)\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}} + \text{etc.}$$

Die zwei ersten dieser Formeln können schon absolut dargeboten werden, entweder algebraisch, was passiert, wenn $\varepsilon = 0$ ist, oder durch Logarithmen, wenn der Wert von ε positiv war, oder durch Kreisbogen, wenn der Wert von ε negativ war. Die übrigen Formeln verlangen hingen die Relation zwischen p und q, welche wir im folgenden ausfindig machen werden. Hier sei nur bemerkt, dass allein gerade Potenzen von q in diese Formeln eingehen.

§97 Hier bedeutet aber der Buchstabe Δ denselben konstanten Wert, welchen wir aber oben bestimmt haben, welcher

$$\Delta = \frac{2\alpha + \beta(f+g) + 2\gamma fg + \delta fg(f+g) + 2\varepsilon ffgg + 2\sqrt{FG}}{(g-f)^2}$$

war. Weil aber außerdem

$$\Phi : y - \Phi : x = \Phi : g - \Phi : f + V$$

sein muss, ist es evident, dass in dem Fall, in dem $x = f$ und $y = g$ ist, $V = 0$ werden muss; deswegen werden jene für V gefundenen Integralformeln so genommen werden, dass für $p = f + g$ und $q = g - f$ der Wert von V verschwindet.

Analysis für das Auffinden der Relation zwischen p und q

§98 Weil wir ja nun eine endliche Gleichung zwischen x und y gefunden haben, könnte aus ihr auch durch Setzen von $y = \frac{p+q}{2}$ und $x = \frac{p-q}{2}$ die Relation zwischen den Buchstaben p und q deriviert werden; aber dies würde allzu unangenehme Rechnungen verlangen, weswegen wir einen anderen Weg beschreiten wollen diese Relation aus den Differentialformeln abzuleiten. Weil nämlich

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\partial y + \partial x}{\partial y - \partial x}$$

ist, wird wegen des Verhältnisses

$$\partial x : \partial y = \sqrt{X} : \sqrt{Y}$$

auch

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{\sqrt{Y} + \sqrt{X}}{\sqrt{Y} - \sqrt{X}}$$

sein; oben haben wir aber gefunden, dass

$$\frac{\sqrt{Y} + \sqrt{X}}{q} = \sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}$$

ist, wo Δ dieselben Konstante bezeichnet, die wir gerade zuvor bestimmt haben.

§99 Nun erweitere man also den für $\frac{\partial p}{\partial q}$ gefundenen Bruch mit $\sqrt{Y} + \sqrt{X}$, und weil

$$(\sqrt{Y} + \sqrt{X})^2 = qq(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)$$

ist, werden wir diese Gleichung haben

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{qq(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon p)}{Y - X},$$

deren Nenner wir schon oben in § 83 entwickelt haben, wo wir gefunden haben, dass

$$Y - X = \beta q + \gamma pq + \frac{1}{4}\delta q(3pp + qq) + \frac{1}{2}\varepsilon pq(pp + qq)$$

ist; nach Einsetzen dieses Wertes wird

$$\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{q(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)}{\beta + \gamma p + \frac{1}{4}\delta(3pp + qq) + \frac{1}{2}\varepsilon p(pp + qq)}$$

sein, welche auf diese Form reduziert wird

$$2q\partial q = \frac{(2\beta + 2\gamma p + \frac{1}{2}\delta(3pp + qq) + \varepsilon p)pp + qq))\partial p}{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}.$$

§100 Wir wollen die Terme, die qq enthalten, von der rechten auf die linke Seite bringen, dass wir diese Gleichung erhalten

$$2q\partial q - \frac{qq\partial p(\frac{1}{2}\delta + \varepsilon p)}{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp} = \frac{(2\beta + 2\gamma p + \frac{3}{2}\delta pp + \varepsilon p^3)\partial p}{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann integrierbar gemacht werden, wenn mit einer gewissen Funktion von p multipliziert wird, welche $= \Pi$ sei, wenn nur

$$\frac{\partial\Pi}{\Pi} = -\frac{\partial p(\frac{1}{2}\delta + \varepsilon p)}{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}$$

war, welche Gleichung integriert

$$\log \Pi = -\frac{1}{2}\log(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)$$

gibt. Und so wird dieser Multiplikator

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}}$$

sein; dann wird aber das gesuchte Integral

$$\frac{qq}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}} = \int \frac{(2\beta + 2\gamma p + \frac{3}{2}\delta pp + \varepsilon p^3)\partial p}{(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)^{\frac{3}{2}}}$$

sein.

§101 Dieses letzte Integral enthält offenbar die Form

$$\frac{pp}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}},$$

deren Differential

$$\frac{(2\Delta p + 2\gamma p + \frac{3}{2}\delta pp + \varepsilon p^3)\partial p}{(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)^{\frac{3}{2}}}$$

ist; daher kann das Integral so dargestellt werden

$$\frac{qq}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}} = \frac{pp}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}} + \int \frac{(2\beta - 2\Delta p)\partial p}{(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)^{\frac{3}{2}}},$$

welches letzte Integral man

$$= \frac{m + np}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}}$$

setze; und daher muss

$$(\Delta+\gamma)n-\frac{1}{2}\delta m=2\beta \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\delta n-\varepsilon m=-2\Delta$$

werden, woher man die Werte

$$m=\frac{4\beta\delta+8\Delta\Delta+8\Delta\gamma}{4\Delta\varepsilon+4\gamma\varepsilon-\delta\delta} \quad \text{und} \quad n=\frac{8\beta\varepsilon+4\Delta\delta}{4\Delta\varepsilon+4\gamma\varepsilon-\delta\delta}$$

ableitet, anstelle welcher Brüche wir die Buchstaben m und n in der Rechnung behalten wollen; als logische Konsequenz wird sich nach Hinzufügen der Konstante die Integralgleichung so verhalten

$$qq=pp+np+m+C\sqrt{\Delta+\gamma+\delta p+\varepsilon pp}.$$

§102 Aber diese Konstante muss so bestimmt werden, dass für $p=f+g$ gesetzt $q=g-f$ wird, woher jene Konstante Größe so bestimmt werden wird

$$C=-\frac{4fg+n(f+g)+m}{\sqrt{\Delta+\gamma+\delta(f+g)+\varepsilon(f+g)^2}}.$$

Nachdem also dieser Wert gefunden wurde, werden leicht die Werte nicht von qq sondern auch aller geraden Potenzen q^4, q^6, q^8 etc., die wir brauchen, angegeben werden können. Und daher wird eingesehen, dass für das Finden des Wertes von V nur solche Integralformeln auftauchen, die den Wurzelausdruck $\sqrt{\Delta+\gamma+\delta p+\varepsilon pp}$ beinhalten, deren Integration, wenn sie nicht algebraisch durchgeführt werden kann, immer mithilfe von Logarithmen und Kreisbogen erledigt werden können wird. Es ist aber ersichtlich, dass im Fall $\varepsilon=0$ alle Integrale algebraisch ausgedrückt werden können.

§103 Wenn daher also für die Kurve OZ

$$\Pi: z=\int\frac{\partial z}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3}}$$

war, für die andere Kurve hingegen

$$\Phi: z=\int\frac{\partial z(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}z+\mathfrak{C}zz+\mathfrak{D}z^3+\text{etc.})}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma zz+\delta z^3}},$$

dann werden, nachdem auf der erste Kurve die gleichen Bogen FG und XY genommen worden sind, ihnen auf der anderen Kurve die Bogen $\mathfrak{FG}$ und

$\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ entsprechen, deren Differenz immer geometrisch angegeben können wird. Dennoch kann es manchmal passieren, dass die Differenz V verschwindet, was immer für $x = f$ eintritt.

§104 Außerdem ist aber auch anderer höchst bemerkenswerter Fall gegeben, dass jene Differenz V algebraisch ausgedrückt werden kann, welcher immer auftritt, wenn so im Nenner wie im Zähler nur gerade Potenzen von z auftauchen, das heißt, wenn für die erste Kurve

$$\Pi : z = \int \frac{\partial z}{\sqrt{\alpha + \gamma zz + \varepsilon z^4}}$$

war, für die andere Kurve hingegen

$$\Phi : z = \int \frac{\partial z(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}zz + \mathfrak{E}z^4 + \mathfrak{G}z^6 + \text{etc.})}{\sqrt{\alpha + \gamma zz + \varepsilon z^4}}.$$

Denn wenn in diesen Fällen auf der ersten Kurve gleiche Bogen FG und XY abgetrennt werden, dann wird die Differenz der entsprechenden Bogen $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ auf der anderen Kurve immer algebraisch oder geometrisch dargeboten werden können, bis zu wie vielen Termen auch immer der Zähler $\mathfrak{A} + \mathfrak{C}zz + \mathfrak{E}z^4 + \text{etc.}$ fortgesetzt wird, und dies ist der Fall, den ich einst so in der *Calculo integrali* wie anderenorts genauer behandelt habe.

§105 Um dies zu zeigen, weil wir so $\delta = 0$ wie $\beta = 0$ haben, wird zuerst

$$qq = pp + m + C\sqrt{\Delta + \gamma + \varepsilon pp}$$

sein, sodass hier nur gerade Potenzen von p auftreten; aber dann werden sich für die germanischen Buchstaben $\mathfrak{C}, \mathfrak{E}, \mathfrak{E}$ etc. die zu integrierenden Formeln auf die folgenden Weise verhalten.
Für den Buchstaben $\mathfrak{C}$

$$\int \frac{p\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \varepsilon pp}},$$

welche per se uneingeschränkt integrierbar ist.
Für den Buchstaben $\mathfrak{E}$

$$\int \frac{p(pp + qq)\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \varepsilon pp}},$$

welche nach Einsetzen des Wert anstelle von qq diese Form annehmen wird

$$\int \frac{p(2pp+m)\partial p}{\sqrt{\Delta+\gamma+\varepsilon pp}} + C\int p\partial p,$$

wo die Integration offensichtlich ist, was auch für die folgenden mit den Buchstaben $\mathfrak{S}$ behafteten Buchstaben passiert. Denn es ist ersichtlich, wenn $\sqrt{\Delta+\gamma+\varepsilon pp} = s$, dass

$$pp = \frac{ss-\Delta-\gamma}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad p\partial p = \frac{s\partial s}{\varepsilon}$$

und daher

$$\frac{p\partial p}{\sqrt{\Delta+\gamma+\varepsilon pp}} = \frac{\partial s}{\varepsilon}$$

wird, nach Einsetzen von welcher alle zu integrierenden Formeln ganzrational werden.

§106 Während aber dieser letzte Fall schon erfolgreich behandelt worden und mit vielen Beispielen, entnommen aus der Rektifikation der Ellipse und der Hyperbel, illustriert worden ist, ist der erste Fall, in dem nur $\varepsilon = 0$ war, umso größerer Aufmerksamkeit würdig, welcher, soviel ich freilich weiß, von noch niemandem bemerkt worden ist, dessen Entwicklung also einzig der Anwendung dieser neuen Methode zuzuschreiben ist. Wie diese Erkenntnisse aber aus der Relation zwischen p und q abgeleitet worden sind, so kann auch eine sehr elegante Relation zwischen diesen Größen $p = x+y$ und $u = xy$ gefunden werden, welche wir hier hinzufügen wollen.

Analysis für das Finden der Relation zwischen p und u

§107 Hier wollen wir in gleicher Weise nach der Relation zwischen ∂p und ∂u suchen, und weil

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial x+\partial y}{y\partial x + x\partial y}$$

ist, wird wegen $\partial x : \partial y = \sqrt{X} : \sqrt{Y}$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{y\sqrt{X} + x\sqrt{Y}}$$

sein und nach Nehmen der Quadrate

$$\frac{\partial p^2}{\partial u^2} = \frac{X + Y + 2\sqrt{XY}}{yyX + xxY + 2xy\sqrt{XY}}.$$

Oben haben wir gesehen, dass

$$(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2 = qq(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)$$

ist, wobei $q = y - x$ ist. Für den Nenner wollen wir aber die in § 87 gefundene Relation

$$\Delta = \frac{2\alpha + \beta(x + y) + 2\gamma xy + \delta xy(x + y) + 2\varepsilon xxyy + 2\sqrt{XY}}{(y - x)^2}$$

gebrauchen, woher

$$2\sqrt{XY} = \Delta qq - 2\alpha - \beta p - 2\gamma u - \delta pu - 2\varepsilon uu$$

ist, nach Einsetzen welches Wertes unsere Gleichung

$$\frac{\partial p^2}{\partial u^2} = \frac{qq(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)}{yyX + xxY + \Delta qqu - 2\alpha u - \beta pu - 2\gamma uu - \delta puu - 2\varepsilon u^3}$$

sein wird.

§108 Hier werden wir aber nach Einsetzen der Werte anstelle von X und Y zuerst

$$yyX + xxY = \alpha(xx + yy) + \beta xy(x + y) + 2\gamma xxyy + \delta xxyy(x + y)$$
$$+\varepsilon xxyy(xx + yy)$$

haben, welche wegen $x + y = p, xy = u$ und $xx + yy = pp - 2u$

$$yyX + xxY = \alpha(pp - 2u) + \beta pu + 2\gamma uu + \delta puu + \varepsilon uu(pp - 2u)$$

sein wird, woher der ganze Nenner gefunden wird

$$\alpha(pp-4u)+\varepsilon uu(pp-4u)+\Delta qqu$$

zu sein; daher, weil $pp-4u=qq$ ist, wird

$$\frac{\partial p^2}{\partial u^2}=\frac{\Delta+\gamma+\delta p+\varepsilon pp}{\Delta u+\alpha+\varepsilon uu}$$

sein, woher diese separierte Gleichung folgt

$$\frac{\partial p}{\sqrt{\Delta+\gamma+\delta p+\varepsilon pp}}=\frac{\partial u}{\sqrt{\alpha+\Delta u+\varepsilon uu}};$$

daher folgt:

Ein bemerkenswertes Theorem

§109 *Wenn man zwischen den zwei Variablen x und y diese Differentialgleichung hat*

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{\partial y}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma yy+\delta y^3+\varepsilon y^4}},$$

dann wird für $x+y=p$ und $xy=u$ gesetzt zwischen diesen Variablen p und u immer diese Differentialgleichung gelten

$$\frac{\partial p}{\sqrt{\Delta+\gamma+\delta p+\varepsilon pp}}=\frac{\partial u}{\sqrt{\alpha+\Delta u+\varepsilon uu}},$$

wo Δ freilich eine beliebige in die letzte Gleichung eingehende Konstante ist, ansonsten enthält aber auch die erste Gleichung die beliebige in der anderen nicht auftauchende Konstante β.

§110 Die Integration der letzten Gleichung ist immer leicht. Denn wenn wir auf beiden Seiten mit $\sqrt{\varepsilon}$ multiplizieren, wird das Integral mit Logarithmen so ausgedrückt

$$\log\left(p\sqrt{\varepsilon}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\Delta+\gamma+\delta p+\varepsilon pp}\right)$$
$$=\log\left(u\sqrt{\varepsilon}+\frac{\Delta}{2\sqrt{\varepsilon}}+\sqrt{\alpha+\Delta u+\varepsilon uu}\right)+\log\Gamma$$

und daher wird das Integral so algebraisch ausgedrückt werden

$$\varepsilon p + \frac{1}{2}\delta + \sqrt{\varepsilon(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)} = \Gamma\left(\varepsilon u + \frac{1}{2}\Delta + \sqrt{\varepsilon}(\alpha + \Delta u + \varepsilon uu)\right).$$

Hier wird diese konstante Γ leicht aus der Bedingung bestimmt, dass für $x = f$ $y = g$ werden muss, das heißt, dass für $p = f + g$ gesetzt $u = fg$ wird, aus welcher Bedingung die erste Konstante Δ schon bestimmt ist.

§111 Damit wir daher noch leichter entweder p durch u oder u durch p bestimmt werden kann, bemerke man, dass

$$\frac{1}{\varepsilon p + \frac{1}{2}\delta + \sqrt{\varepsilon(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)}} = \frac{\varepsilon p + \frac{1}{2}\delta - \sqrt{\varepsilon(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)}}{\frac{1}{4}\delta\delta - \varepsilon(\Delta + \gamma)}$$

und

$$\frac{1}{\varepsilon u + \frac{1}{2}\Delta + \sqrt{\varepsilon(\alpha + \Delta u + \varepsilon uu)}} = \frac{\varepsilon u + \frac{1}{2}\Delta - \sqrt{\varepsilon(\alpha + \Delta u + \varepsilon uu)}}{\frac{1}{4}\Delta\Delta - \alpha\varepsilon}$$

ist. Daher wird also per Inversion die folgende Gleichung resultieren

$$\frac{\varepsilon p + \frac{1}{2}\delta - \sqrt{\varepsilon(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)}}{\frac{1}{4}\delta\delta - \varepsilon(\Delta + \gamma)} = \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{\varepsilon u + \frac{1}{2}\Delta - \sqrt{\varepsilon(\alpha + \Delta u + \varepsilon uu)}}{\frac{1}{4}\Delta\Delta - \alpha\varepsilon}$$

oder

$$\begin{aligned} &\varepsilon p + \frac{1}{2}\delta - \sqrt{\varepsilon(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\delta\delta - \varepsilon(\Delta + \gamma)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\Delta\Delta - \alpha\varepsilon\right)} \cdot \left(\varepsilon u + \frac{1}{2}\Delta - \sqrt{\varepsilon(\alpha + \Delta u + \varepsilon uu)}\right), \end{aligned}$$

aus welchen zwei Gleichungen ohne Mühe entweder p durch u oder u durch p ausgedrückt werden können wird.

§112 Auf diese Weise könnte also anstelle der Variable p für das Finden der Größe V leicht die Variable u eingeführt werden, wenn freilich anstelle der Formel

$$\frac{\partial p}{\sqrt{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}}$$

selbiger gleiche

$$\frac{\partial u}{\sqrt{\alpha + \Delta u + \varepsilon uu}}$$

eingesetzt wird. Aber auf diese Weise werden jene Fälle, in denen die Größe V algebraisch sind, nicht so leicht erkannt werden; dennoch werden wir indes auch auf diese Weise sicher sein, dass so in den Fällen, in denen $\varepsilon = 0$ ist, wie in dem, in dem $\beta = 0$, $\delta = 0$ ist und in der Reihe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. nur gerade Potenzen auftauchen, alle Integrationen algebraisch gelingen müssen. Anstelle des Schlussschnörkels wollen wir noch eine Relation zwischen den Größen p und u ausfindig machen, deren Betrachtung einen riesigen Zuwachs bei der Integration zu verheißen scheint.

Andere Analysis für das Finden der Relation zwischen p und u

§113 Weil, wie wir zuvor gesehen haben,

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{y\sqrt{X} + x\sqrt{Y}}$$

ist, wollen wir mit $\sqrt{X} + \sqrt{Y}$ multiplizieren, dass der Zähler

$$(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2 = qq(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)$$

ist; dann wird aber der Nenner als

$$yX + xY + (x+y)\sqrt{XY}$$

hervorgehen, wo der rationale Teil

$$\alpha(x+y) + 2\beta xy + \gamma xy(x+y) + \delta xy(xx+yy) + \varepsilon xy(x^3+y^3)$$

gibt, welcher Ausdruck wegen $x + y = p$, $y - x = q$ und $xy = u$ in

$$\alpha u + 2\beta u + \gamma pu + \delta u(pp - 2u) + \varepsilon pu(pp - 3u)$$

übergeht. Weiter haben wir aber zuvor gesehen, dass

$$2\sqrt{XY} = \Delta qq - 2\alpha - \beta p - 2\gamma u - \delta pu - 2\varepsilon uu$$

ist, was mit $\frac{1}{2}p$ und zur oberen addiert

$$\frac{1}{2}\Delta pqq - \frac{1}{2}\beta(pp - 4u) + \frac{1}{2}\delta u(pp - 4u) + \varepsilon pu(pp - 4u)$$

liefert, woher der Nenner $pp - 4u = qq$ diese Form annehmen wird

$$\frac{1}{2}\Delta pqq - \frac{1}{2}\beta qq + \frac{1}{2}\delta uqq + \varepsilon puqq;$$

daher wird die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp}{\frac{1}{2}\Delta p - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta u + \varepsilon pu}$$

sein, woher man

$$\partial p\left(\frac{1}{2}\Delta p - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\delta u + \varepsilon pu\right) = \partial u(\Delta + \gamma + \delta p + \varepsilon pp)$$

ableitet, welche also gewiss integrierbar ist; das ist daher klar, weil die eine Variable u nie weiter als die erste Potenz ansteigt.

§114 Die Relation zwischen p und u kann aber auf noch eine andere Weise ausfindig gemacht werden; wenn natürlich die zuerst gefundene Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{y\sqrt{X} + x\sqrt{Y}}$$

mit $\sqrt{Y} - \sqrt{X}$ erweitert wird, wird sie

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{Y - X}{-yX + xY + \sqrt{XY}(y - x)}$$

geben. Nun werden wir also für den Zähler

$$\beta q + \gamma pq + \delta q(pp - u) + \varepsilon pq(pp - 2u)$$

haben. Für den Nenner wird hingegen der rationale Teil

$$-\alpha q + \gamma qu + \delta pqu + \varepsilon qu(pp-u)$$

sein, der irrationale Teil hingegen

$$\frac{1}{2}\Delta q^3 - \alpha q - \frac{1}{2}\beta pq - \gamma qu - \frac{1}{2}\delta pqu - \varepsilon quu,$$

woher der ganze Nenner insgesamt

$$\frac{1}{2}\Delta q^3 - 2\alpha q - \frac{1}{2}\beta pq + \frac{1}{2}\delta pqu + \varepsilon qu(pp-2u)$$

ist, woher diese Differentialgleichung folgt

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\beta + \gamma p + \delta(pp-u) + \varepsilon p(pp-2u)}{\frac{1}{2}\Delta(pp-4u) - 2\alpha - \frac{1}{2}\beta p + \frac{1}{2}\delta pu + \varepsilon u(pp-2u)},$$

welche sich in Ordnung gebracht so verhalten wird

$$\begin{aligned}&\partial p(\Delta(pp-4u) - 4\alpha - \beta p + \delta pu + 2\varepsilon u(pp-2u))\\ &\quad = 2\partial u(\beta + \gamma p + \delta(pp-u) + \varepsilon p(pp-2u)),\end{aligned}$$

welche allerdings so beschaffen ist, dass kein Weg ihre Integration durchzuführen erkannt werden kann, auch wenn wir ihr Integral tatsächlich darbieten können.

§115 Darüber hinaus lässt sich die Relation zwischen p und u auf noch eine andere Weise bestimmen, wenn wir die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\sqrt{X}+\sqrt{Y}}{y\sqrt{X}+x\sqrt{Y}}$$

mit $y\sqrt{X} - x\sqrt{Y}$ erweitern, dass

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{yX - xY + (y-x)\sqrt{XY}}{yyX - xxY}$$

hervorgeht. Nun wird nämlich der Nenner

$$\alpha pq + \beta qu - \delta quu - \varepsilon pquu$$

werden. Für den Zähler liefert aber der rationale Teil

$$\alpha q - \gamma qu - \delta pqu - \varepsilon qu(pp - u)$$

und der irrationale Teil

$$\frac{1}{2}\Delta q^3 - \alpha q - \frac{1}{2}\beta pq - \gamma qu - \frac{1}{2}\delta pqu - \varepsilon quu;$$

der ganze Zähler wird also

$$\frac{1}{2}\Delta q^3 - \frac{1}{2}\beta pq - 2\gamma qu - \frac{3}{2}\delta pqu - \varepsilon qupp$$

sein und daher

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\frac{1}{2}\Delta(pp - 4u) - \frac{1}{2}\beta p - 2\gamma u - \frac{3}{2}\delta pu - \varepsilon ppu}{\alpha p + \beta u - \delta uu - \varepsilon puu}$$

oder

$$2\partial p(\alpha p + \beta u - \delta uu - \varepsilon puu) = \partial u(\Delta(pp - 4u) - \beta p - 4\gamma u - 3\delta pu - 2\varepsilon ppu).$$

Hier ist aber überhaupt nicht klar, wie der Multiplikator, der diese Gleichung integrierbar macht, ausfindig gemacht werden muss, woher kein Zweifel besteht, dass diese Betrachtung nicht wenig beitragen kann, um die Grenzen der Analysis zu erweitern.